複素領域のカレントによる調和関数の積分表示 (微分方程式論における積分公式とTwisted Cohomology)

山根, 英司

数理解析研究所講究録 1212 巻 2001 年 157-165

複素領域のカレントによる調和関数の積分表示

千葉工業大学自然系 山根英司
Hideshi YAMANE, Chiba Institute of Technology

1 イントロダクション

B_n を $\mathbf{R}_t^n$ の開単位球とし, $u(t) \in \mathcal{C}^\infty(\bar{B}_n)$ を B_n の調和関数とする. このとき $\{z \in \mathbf{C}^n; z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}$ に台が含まれる指数減少の測度 $d\mu(z)$ が存在して $u(t) = \int e^{-i\langle z,t\rangle} d\mu(z)$ が成り立つ.

この事実は, 任意の定数係数線型偏微分方程式系に関する Ehrenpreis の基本原理の一例である. 基本原理はもともと Hahn-Banach の定理を用いて証明された. 証明が抽象的だから, 測度の具体的な表示を得ることはできなかった.

その一方で, 多変数複素解析の積分公式が正則関数の除法問題に応用されるようになってきた. これらの結果に Fourier 変換と双対性を合わせて用いると, 基本原理の具体的バージョンが導ける. 例えば [1], [2], [6], [8], [11] がある. これらの研究では測度の代わりにカレントを用いて積分表示が定式化されている.

Laplacian の場合, [2] の一般的な公式には無駄がある. Dirichlet 境界値以外のデータで決まる項を含んでいるからである.

本稿の目的は, こういう無駄のない調和関数の Fourier-Ehrenpreis 型積分表示を与えることである. 主として $n = 3$ の場合を扱う. このとき

$$u(t) = [V]_{\cdot} \frac{1}{4\pi^2}\left(2 - \frac{1}{|y|}\right) v(y/|y|) e^{-i\langle z, t-y/|y|\rangle} (\bar{\partial}\partial|y|)^2$$

が成り立つ. ここで $u \in \mathcal{C}^0(\bar{B}_3)$ は開単位球 B_3 内で調和で, $[V]$ は $V = \{z \in \mathbf{C}^3; z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$ に沿う積分のカレントであり, 下付きドットはカレントの作用を表す. $y = \mathrm{Im} z$ で, v は $u(t)$ の Dirichlet 境界値である. すなわち, 右辺が Poisson 積分に一致する. $n = 2$ の場合は最後の節で結果のみを述べる.

[4] と [7] で示されたように, residue current $\bar{\partial}[1/z^2]$ は $\bar{\partial}[1/z^2] \wedge d(z^2) = 2\pi i[V]$ を満たすので, 上の公式は $u(t)$ を $\bar{\partial}[1/z^2]$ で表していることになる.

2 幾何学的準備

$\mathbf{C}^3_z, z = (z_1, z_2, z_3)$, の解析的集合 $V = \{z \in \mathbf{C}^3; z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$ を考える．原点は特異点である．V(の smooth locus) に沿う積分のカレントを $[V]$ で表す．

$x_j = \mathrm{Re} z_j, y_j = \mathrm{Im} z_j\,(j = 1, 2, 3)$, $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ と置く．方程式 $z^2 = |x|^2 - |y|^2 + 2i\langle x, y\rangle = 0$ が成り立つための必要十分条件は $|x| = |y|$ かつ x と y が直交することである．$y \neq 0$ を固定すると，対応する x たちの全体は $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ と同一視できる．このアイデアに基づいて， V の稠密開集合に座標を入れよう．

$\widehat{V} = V \setminus \{y_1 = y_2 = 0\}$ で V の稠密開集合 $\widehat{V}$ を定める．$E = \mathbf{R}^3_y \setminus \{y_1 = y_2 = 0\}$ と置く．

$y = (y_1, y_2, y_3) \in E$ に対し

$$v = \frac{|y|}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}(-y_2, y_1, 0),\ w = \frac{1}{|y|} y \times v = \frac{(-y_1 y_3, -y_2 y_3, y_1^2 + y_2^2)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

とする．ここで $\times$ はベクトル積である．$\langle y, v\rangle = \langle v, w\rangle = \langle w, y\rangle = 0$, $|y| = |v| = |w|$ が成り立つ.

$x(y, \theta) = v\cos\theta + w\sin\theta$ すなわち

$$\begin{aligned}
x_1 &= -|y|y_2\cos\theta/\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - y_1 y_3 \sin\theta/\sqrt{y_1^2 + y_2^2},\\
x_2 &= |y|y_1\cos\theta/\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - y_2 y_3 \sin\theta/\sqrt{y_1^2 + y_2^2},\\
x_3 &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\sin\theta
\end{aligned}$$

と置くと,

$$\Phi : E \times S^1 \xrightarrow{\sim} \widehat{V}, \quad (y, \theta) \mapsto z = x(y, \theta) + iy$$

は微分同相写像となる.

明らかに $\Phi^*(y_j) = y_j, \Phi^*(dy_j) = dy_j\,(j = 1, 2, 3)$ である．$\widehat{V}$ は V の稠密開集合だから, カレント $[V]$ の作用は $E \times S^1$ 上の積分で表される.

命題 1 4形式 $(\Phi^{-1})^*(dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\theta)$ は $\widehat{V}$ の自然な向きに関して正である.

証明 $\{z \in V; y_3 \neq 0\}$ において, (z_1, z_2) は正則な局所座標系となるから, $dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2$ は自然な向きに関して正である.

$$
\begin{aligned}
&\Phi^*(dx_1)\\
= &-\frac{(-|y|y_2\sin\theta+y_1y_3\cos\theta)d\theta}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}+\frac{y_2y_3(-|y|y_2\sin\theta+y_1y_3\cos\theta)dy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}|y|}\\
&-\frac{\{(y_2^4+2y_1^2{y_2}^2+y_1^4+y_1^2y_3^2)\cos\theta-y_1y_2y_3|y|\sin\theta\}dy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}|y|}\\
&-\frac{(y_2y_3\cos\theta+y_1|y|\sin\theta)dy_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}|y|},\\
&\Phi^*(dx_2)\\
= &-\frac{(y_2y_3\cos\theta+y_1|y|\sin\theta)d\theta}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\\
&+\frac{\{(2y_1^2y_2^2+y_1^4+y_2^4+y_2^2y_3^2)\cos\theta+y_1y_2y_3|y|\sin\theta\}dy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}|y|}\\
&-\frac{y_1y_3(y_2y_3\cos\theta+y_1|y|\sin\theta)dy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{3/2}|y|}+\frac{(-|y|y_2\sin\theta+y_1y_3\cos\theta)dy_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}|y|}
\end{aligned}
$$

が成り立ち,

$$
\Phi^*(dx_1\wedge dy_1\wedge dx_2\wedge dy_2)=\frac{(y_1^2+y_2^2)\sin^2\theta+y_3^2}{|y|}dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3\wedge d\theta
$$

となる. $\{(y_1^2+y_2^2)\sin^2\theta+y_3^2\}/|y|$ が正だから, $dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3\wedge d\theta$ は $dx_1\wedge dy_1\wedge dx_2\wedge dy_2$ と同じ向きを定める. **証了**

注. $y_1=y_2=0$ に特異性があるのがすっきりしないが, これは避けることができない. 実際, もし連続写像 $\varphi:\mathbf{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$ であって $\varphi(y)$ が y に直交するものが存在すれば, S^2 上のどの点でも消えないベクトル場が誘導される. これが不可能なことはHopfの定理によって知られている.

3 積分作用素

$B_3=\{t\in\mathbf{R}_t^3;|t|<1\}$ を $\mathbf{R}_t^3$ の開単位球とする. v は $\partial B_3=S^2$ 上の連続関数とする.

積分作用素 $Q_0, Q_1 : \mathcal{C}^0(S^2) \to \mathcal{C}^\infty(B_3)$ を導入しよう．$t \in B_3$ に対し，

$$\begin{aligned} Q_0[v](t) &= [V] \,.\, v(y/|y|)e^{-i\langle z, t-y/|y|\rangle}(-2i\bar{\partial}\partial|y|)^2, \\ Q_1[v](t) &= [V] \,.\, \frac{v(y/|y|)}{|y|}e^{-i\langle z, t-y/|y|\rangle}(-2i\bar{\partial}\partial|y|)^2 \end{aligned}$$

と定める．

補題 1 もし f が y だけの関数ならば

$$-2i\bar{\partial}\partial f = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2} dx_j \wedge dy_j + \sum{}' \frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_k}(dx_j \wedge dy_k + dx_k \wedge dy_j)$$

が成り立つ．ここで $\sum'$ は $(j,k) = (1,2), (1,3), (2,3)$ に関する和である．特に $f(y) = |y|$ のとき

$$-2i\bar{\partial}\partial|y| = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{|y|} - \frac{y_j^2}{|y|^3}\right)dx_j \wedge dy_j - \sum{}' \frac{y_j y_k}{|y|^3}(dx_j \wedge dy_k + dx_k \wedge dy_j)$$

である．

証明 直接計算による． 証了

命題 2 $E \times S^1$ の上で

$$\begin{aligned} \Phi^*(-i\langle z, t - y/|y|\rangle) &= \langle y, t\rangle - |y| - i\langle x(y,\theta), t\rangle, \\ \Phi^*((-2i\bar{\partial}\partial|y|)^2) &= -\frac{2}{|y|}dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\theta \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明 第 1 式は $\langle x, y\rangle = 0$ から出る．

補題 1 により，

$$\begin{aligned} & |y|^4(-2i\bar{\partial}\partial|y|)^2 \\ = \ & 2(y_1^2 dx_2 \wedge dy_2 \wedge dx_3 \wedge dy_3 + y_2^2 dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_3 \wedge dy_3 \\ & + y_3^2 dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 - y_1 y_3 dx_2 \wedge dy_2 \wedge dx_1 \wedge dy_3 \\ & - y_1 y_2 dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_3 \wedge dy_3 - y_1 y_3 dx_3 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \\ & + y_2 y_3 dx_3 \wedge dy_1 \wedge dx_1 \wedge dy_2 - y_2 y_3 dx_2 \wedge dy_3 \wedge dx_1 \wedge dy_1 \\ & + y_1 y_2 dx_2 \wedge dy_3 \wedge dx_3 \wedge dy_1) \end{aligned}$$

が分かる．$\Phi^*(dx_1)$ と $\Phi^*(dx_2)$ は既に命題 1 の証明の途中で計算した．さらに

$$\Phi^*(dx_3) = \sqrt{y_1^2+y_2^2}\cos\theta d\theta + \frac{y_1\sin\theta}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}dy_1 + \frac{y_2\sin\theta}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}dy_2$$

である．残りの計算は省略する．(Maple の`difforms`パッケージを使うと楽である.)

証了

Q_0 と Q_1 は $(y,\theta)\in E\times S^1$ に関する積分で書ける．
命題 1,2 より

$$\begin{aligned} Q_0[v](t) &= \int_{\mathbf{R}^3\times S^1} e^{\langle y,t\rangle-|y|-i\langle x(y,\theta),t\rangle}\frac{-2v(y/|y|)}{|y|}dy_1dy_2dy_3d\theta, \\ Q_1[v](t) &= \int_{\mathbf{R}^3\times S^1} e^{\langle y,t\rangle-|y|-i\langle x(y,\theta),t\rangle}\frac{-2v(y/|y|)}{|y|^2}dy_1dy_2dy_3d\theta \end{aligned}$$

である．

$\mathbf{R}^3$ に極座標を導入しよう．$q=|y|, s_j=y_j/q\,(j=1,2,3)$ と置く．$s=(s_1,s_2,s_3)\in S^2\setminus\{(0,0,\pm1)\}$ となる．$d\sigma(s)$ を S^2 の面積測度とする．q に関する積分は Laplace 型で，

$$\begin{aligned} Q_0[v](t) &= \int_{S^2}d\sigma(s)\int_{S^1}d\theta\int_0^\infty -2qe^{-q\{1-\langle s,t\rangle+i\langle x/q,t\rangle\}}v(s)dr \\ &= -2\int_{S^2}d\sigma(s)\int_{S^1}\frac{v(s)}{\{1-\langle s,t\rangle+i\langle x/q,t\rangle\}^2}d\theta, \\ Q_1[v](t) &= \int_{S^2}d\sigma(s)\int_{S^1}d\theta\int_0^\infty -2e^{-q\{1-\langle s,t\rangle+i\langle x/q,t\rangle\}}v(s)dr \\ &= -2\int_{S^2}d\sigma(s)\int_{S^1}\frac{v(s)}{1-\langle s,t\rangle+i\langle x/q,t\rangle}d\theta \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $x=x(y,\theta)$ と略記している．x/q は q によらない．

後で用いる初等的な公式を証明しておこう．

補題 2 a は正で，b は実とすると

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+ib\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+ib\sin\theta)^2}=\frac{2\pi a}{(a^2+b^2)^{3/2}}$$

が成り立つ．

証明 第1式は留数計算で示される．第1式の両辺を a について偏微分すると第2式が出る． 証了

補題 3 a は正で b と c は実とすると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+i(b\sin\theta+c\cos\theta)} &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\\ \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\{a+i(b\sin\theta+c\cos\theta)\}^2} &= \frac{2\pi a}{(a^2+b^2+c^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明 $b\sin\theta+c\cos\theta=\sqrt{b^2+c^2}\sin(\theta+\alpha)$, $\alpha=\arg(b+ic)$ である．

周期 2π の任意の関数 $f=f(\theta)$ について $\int_0^{2\pi}f(\theta+\alpha)d\theta=\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta$ だから，$k=1,2$ に対して

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\{a+i\sqrt{b^2+c^2}\sin(\theta+\alpha)\}^k}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+i\sqrt{b^2+c^2}\sin\theta)^k}$$

が成り立つ．後は補題2を当てはめればよい． 証了

ここで

$$\begin{aligned}a &= 1-\langle s,t\rangle=1-s_1t_1-s_2t_2-s_3t_3>0,\\ b &= -\frac{s_1s_3t_1}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}-\frac{s_2s_3t_2}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}+\sqrt{s_2^2+s_1^2}t_3,\\ c &= -\frac{s_2t_1}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}+\frac{s_1t_2}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}\end{aligned}$$

と置くと $\langle x/q,t\rangle=b\sin\theta+c\cos\theta$ であり，

$$\begin{aligned}Q_0[v](t) &= -2\int_{S^2}\frac{2\pi av(s)}{(a^2+b^2+c^2)^{3/2}}d\sigma(s),\\ Q_1[v](t) &= -2\int_{S^2}\frac{2\pi v(s)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}d\sigma(s)\end{aligned}$$

が成り立つ．

補題 4 $s\in S^2\setminus\{(0,0,\pm1)\}$, $t\in B_3$ と上の (a,b,c) に対して，

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=|s-t|$$

が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2-|s-t|^2)(s_1^2+s_2^2)\\
=\ &(s_1^2+s_2^2+s_3^2-1)(s_1^2t_1^2+s_1^2t_3^2-s_1^2+2s_1s_2t_1t_2+s_2^2t_2^2-s_2^2+s_2^2t_3^2)
\end{aligned}
$$

を示すことができる．$s\in S^2\backslash\{(0,0,\pm1)\}$ だから右辺は0である．$s_1^2+s_2^2\neq 0$ に注意しよう． **証了**

この補題から，$Q_0[v](t)$ は Poisson 積分に似ており，$Q_1[v](t)$ は 1 重層ポテンシャルであることが分かる．すなわち

命題 3

$$
\begin{aligned}
Q_0[v](t) &= -4\pi\int_{S^2}\frac{1-\langle s,t\rangle}{|s-t|^3}v(s)d\sigma(s),\\
Q_1[v](t) &= -4\pi\int_{S^2}\frac{1}{|s-t|}v(s)d\sigma(s)
\end{aligned}
$$

である．

4 主結果

B_3 と v は前節のものとする．

積分作用素 $Q:\mathcal{C}^0(S^2)\to\mathcal{C}^\infty(B_3)$ を

$$
Q[v](t)=[V]\cdot\frac{1}{4\pi^2}\left(2-\frac{1}{|y|}\right)v(y/|y|)e^{-i\langle z,t-y/|y|\rangle}(\bar\partial\partial|y|)^2,\quad t\in B_3
$$

で定める．

命題 4 作用素 Q は Poisson 積分と一致する:

$$
Q[v](t)=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\frac{1-|t|^2}{|s-t|^3}v(s)d\sigma(s),\quad t\in B_3.
$$

証明 $|s|=1$ だから $2(1-\langle s,t\rangle)-|s-t|^2=1-|t|^2$ であり，

$$
\frac{2}{-4\pi}Q_0[v](t)-\frac{1}{-4\pi}Q_1[v](t)=\int_{S^2}\frac{1-|t|^2}{|s-t|^3}v(s)d\sigma(s)
$$

となる．

$$
Q[v](t)=\frac{2}{-16\pi^2}Q_0[v](t)-\frac{1}{-16\pi^2}Q_1[v](t)
$$

から命題が従う． **証了**

定理 1 もし $u(t) \in \mathcal{C}^0(\bar{B}_3)$ が B_3 で調和であり，$v \in \mathcal{C}^0(S^2)$ がその Dirichlet 境界値ならば，B_3 内で $u(t) = Q[v](t)$ が成り立つ．特に $u(t)$ は $z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ と $y/|y| \in \operatorname{supp} v$ を満たす指数関数 $\exp(-i\langle z, t\rangle)$ たちの重ね合わせである．

5　2変数の場合

主結果として3変数の場合を述べて証明を与えたが，この節では2変数の場合の結果だけを述べる．$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2)$ と因数分解できるので，証明は3変数の場合よりはるかに易しい．

$\mathbf{R}_t^2, t = (t_1, t_2)$, の開単位球を B_2 とする．v は $\partial B_2 = S^1$ 上の連続関数とする．$\mathbf{C}^2$ の座標を $z = (z_1, z_2)$，$z_j = x_j + iy_j\ (j = 1, 2)$ と置く．$V = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2;\ z_1^2 + z_2^2 = 0\}$ とし，$t \in B_2$ に対して

$$Q'[v](t) = \frac{-1}{16\pi}[V] \,.\, v(y/|y|)e^{-i\langle z, t - y/|y|\rangle}\bar{\partial}\partial|y|$$

と置くことにより積分作用素 Q' を定義する．

定理 2 もし $u(t) \in \mathcal{C}^0(\bar{B}_2)$ が B_2 で調和であり，$v \in \mathcal{C}^0(S^2)$ がその Dirichlet 境界値ならば，B_2 内で

$$u(t) = 2Q'[v](t) - Q'[v](0)$$

が成り立つ．

参考文献

[1] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger, "Residue currents and Bezout identities", Birkhäuser, Basel, 1993.

[2] B. Berndtsson and M. Passare, Integral formulas and an explicit version of the fundamental principle, J. Funct. Anal., **84** (1989), 358-372.

[3] J. E. Björk, "Rings of differential operators", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[4] N. R. Coleff and M. E. Herrera, "Les courants résiduels associés à une forme méromorphe", Lect. Notes in Math. **633**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[5] L. Hörmander, "An introduction to complex analysis in several variables, third edition (revised)", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1990.

[6] A. Meril and A. Yger, Problème de Cauchy globaux, Bull. Soc. math. France, **120** (1992), 87-111.

[7] M. Passare, A calculus for meromorphic currents, J. reine angew. Math., **392** (1988), 37-56.

[8] M. Passare, Residue solutions to holomorphic Cauchy problems, "Seminar in Complex Analysis and Geometry 1987 (Rende, 1987)", EditEl, Rende, 1988, 101-105.

[9] H. Yamane, Residue currents and a Fourier integral representation of harmonic functions, preprint.

[10] H. Yamane, Fourier integral representation of harmonic functions in terms of a current, preprint

[11] A. Yger, Formules de division et prolongement méromorphe, Springer Lecture Notes in Math., **1295** (1987), 226-283.

山根英司
千葉工業大学自然系
275-0023 習志野市芝園 2-1-1
e-mail: yamane@pf.it-chiba.ac.jp,
hideshi.yamane@nifty.ne.jp